LUCRAREA Nr. 7

INTERPOLAREA ŞI EXTRAPOLAREA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ

1. Scopul lucrării

Lucrarea are ca scop prezentarea şi însuşirea de către studenți a modului de lucru pentru realizarea interpolării şi extrapolării funcțiilor de o variabilă, utilizând produsul Mathcad.

2. Noțiuni teoretice

2.1. Interpolarea funcțiilor de o variabilă

Problema aproximării unei funcții de o variabilă trebuie rezolvată în diverse situații, următoarele două fiind mai frecvente:

• funcția este cunoscută, dar are o formă complicată, dificil de aplicat în calcule;

• funcția nu este complet cunoscută, fiind date numai valorile ei pe o mulțime discretă şi finită de puncte.

În primul caz, aproximarea se poate face destul de exact, restricțiile fiind legate de condiția ca, funcția care aproximează să fie cât mai simplă.

În al doilea caz informațiile sunt reduse şi se completează cu presupuneri suplimentare, privind gradul de regularitate al funcției. Este cazul prezentat în continuare.

Fiind dată o funcție **f**, cunoscută prin măsurători efectuate asupra ei, în punctele $\mathbf{x_1,...,x_n}$, numite noduri de interpolare, **yi=f(xi)**, se cere să se determine valoare aproximativă a acestei funcții în punctul $\mathbf{a \neq x_i}$, $\mathbf{(\forall)i=1 \div n}$.

În Mathcad sunt definite funcții care rezolvă problema aproximării funcțiilor prin *interpolare liniară* sau *interpolare spline*.

2.1.1. Interpolare liniară

Pentru a realiza interpolarea liniară se apelează funcția **linterp(vx,vy,x)**, care determină valoarea de interpolare în punctul **x** pentru vectorii de date **vx** şi **vy**.

Argumentele funcției **linterp(vx,vy,x)** sunt:

• **vx** este un vector de date reale în ordine crescătoare;

• **vy** este un vector de date reale care trebuie să aibă acelaşi număr de elemente ca şi vectorul **vx**;

• **x** este valoarea reală a variabilei independente din rezultatul de interpolare. Pentru rezultate corecte, aceasta trebuie să aibă domeniul de variație acoperitor față de valorile lui **vx**.

Următoarea secvență realizează o interpolare liniară, prin funcția **linterp(x,y,a)**, cunoscându-se cinci valori ale vectorilor de date, **x** şi **y**.

Aplicație:

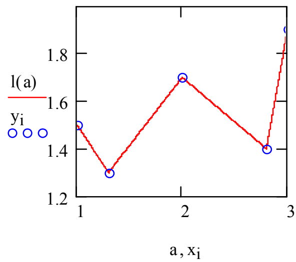
$x_1 := 1 \quad x_2 := 1.3 \quad x_3 := 2 \quad x_4 := 2.8 \quad x_5 := 3$

$y_1 := 1.5 \quad y_2 := 1.3 \quad y_3 := 1.7 \quad y_4 := 1.4 \quad y_5 := 1.9$

$l(a) := \mathrm{linterp}(x, y, a)$

$a := 1, 1.001 .. 3$

$i := 1 .. 5$



Rezultă valoarea funcției **l** în punctul **a=1.5**:

l(1.5)=1.414.

2.1.2. Interpolare spline

Interpolarea spline cubică, în una sau două dimensiuni, aproximează prin *funcții spline*, caracterizate prin trei forme diferite (cspline, pspline sau lspline) pe subintervalele dintre două noduri şi prin anumite condiții de racordare în noduri. Funcția definită în Mathcad este **interp(vs,vx,vy,x)** care determină valorile interpolării spline pentru vectorul **vy** în punctele **x**, utilizând vectorul de ieşire **vs** pentru **cspline**, **pspline** sau **lspline**, cu condiții de racordare în noduri **cubice**, **parabolice**, respectiv **liniare**.

Argumentele funcției **interp(vs,vx,vy,x)** sunt:

• **vx** şi **vy** sunt vectori de date reale care au aceeaşi lungime. Elementele vectorului **vx**, date independente, sunt în ordine crescătoare;

• **vs** este vectorul generat de **cspline(vx,vy)**, **pspline(vx,vy)** sau **lspline(vx,vy)**;

• **x** este valoarea reală a variabilei independente din curba de interpolare. Pentru rezultate cât mai exacte, aceasta trebuie să aibă domeniul de variație acoperitor față de valorile lui **vx**.

Primul argument al funcției **interp**, vectorul **vs**, determină vectorul derivatelor de ordinul doi pentru vectorii de date **vx** şi **vy** şi poate fi:

• **cspline(vx,vy)**, funcție spline de ordinul trei, curba rezultantă între noduri fiind cubică;

• **pspline(vx,vy)**, funcție spline de ordinul doi, rezultând segmente de parabolă racordate în noduri;

• **lspline(vx,vy)**, funcție spline de ordinul întâi, rezultând o linie poligonală între noduri.

Următoarea secvență rezolvă aceeaşi problemă ca şi la interpolarea liniară, realizând o interpolare **spline**, prin funcția **interp(vs,x,y,a)**, cu cele trei condiții diferite:

Aplicație:

$x_1 := 1 \quad x_2 := 1.3 \quad x_3 := 2 \quad x_4 := 2.8 \quad x_5 := 3$

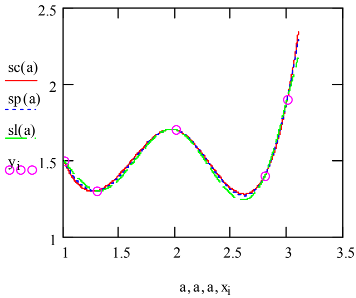
$y_1 := 1.5 \quad y_2 := 1.3 \quad y_3 := 1.7 \quad y_4 := 1.4 \quad y_5 := 1.9$

$a := 1, 1.001 .. 3.1 \qquad i := 1 .. 5$

$sc(a) := interp(cspline(x,y), x, y, a)$

$sp(a) := interp(pspline(x,y), x, y, a)$

$sl(a) := interp(lspline(x,y), x, y, a)$



2.2. Extrapolarea funcțiilor de o variabilă

Pentru extrapolarea funcțiilor de o variabilă se foloseşte funcția definită **predict(v,m,n)**, care determină vectorul următoarelor **n** valori estimate în funcție de valorile precedente ale vectorului **v**. Funcția **predict** utilizează metoda Burg de calcul a coeficienților pentru ultimele **m** puncte din vectorul **v**.

Argumentele funcției **predict(v,m,n)** sunt:

• **v** este vectorul care conține valorile reale date;

• **m**, **n** sunt numere întregi pozitive, *0<m<length(v)-1*. În practică, **m** trebuie să fie mult mai mic decât **length(v)**.

Aplicație:

Să se determine următoarele 10 valori în funcție de ultimele 20 de valori date, utilizând funcția **predict**:

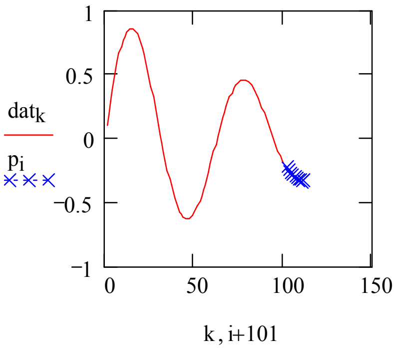
$k := 1 .. 100$

$$dat_k := \exp\left(\frac{-k}{100}\right)\cdot\sin\left(\frac{k}{10}\right)$$

$p := \text{predict}(dat, 20, 10)$

p =

	1
1	-0.228
2	-0.252
3	-0.274
4	-0.293
5	-0.308
6	-0.32
7	-0.328
8	-0.333
9	-0.335
10	-0.333



3. Chestiuni de studiat

3.1. Să se aproximeze și să se reprezinte grafic prin interpolare liniară și apoi prin interpolare spline cubică vectorii de date **m** și **n**, cu valorile de mai jos:

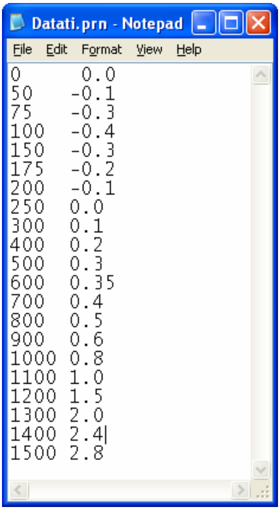
$m_1 := 1;\ m_2 := 1.7;\ m_3 := 2.1;\ m_4 := 2.5;\ m_5 := 3;$

$n_1 := 1.5;\ n_2 := 1.3;\ n_3 := 1.7;\ n_4 := 1.4;\ n_5 := 1.9.$

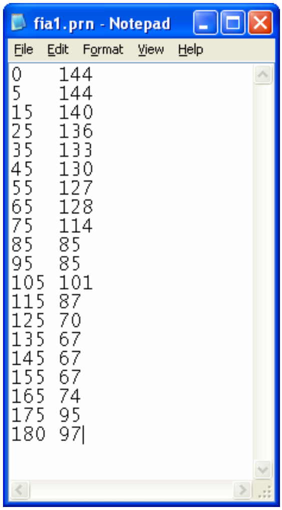
3.2. Să se aproximeze și să se reprezinte grafic prin interpolare liniară și apoi prin interpolare spline cubică vectorii de date **m** și **n**, ale căror valorile sunt conținute în coloana 1, respectiv coloana 2 din matricea **A**:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 20 \\ 3 & 23 \\ 4 & 4 \\ 5 & 35 \\ 6 & 24 \\ 7 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.3. Să se aproximeze şi să se reprezinte grafic prin interpolare liniară şi apoi prin interpolare spline cubică vectorii de date **m** şi **n**, ale căror valori sunt conţinute în fişierul exterior de date cu numele „**datati.prn**”.



0	0.0
50	-0.1
75	-0.3
100	-0.4
150	-0.3
175	-0.2
200	-0.1
250	0.0
300	0.1
400	0.2
500	0.3
600	0.35
700	0.4
800	0.5
900	0.6
1000	0.8
1100	1.0
1200	1.5
1300	2.0
1400	2.4
1500	2.8



0	144
5	144
15	140
25	136
35	133
45	130
55	127
65	128
75	114
85	85
95	85
105	101
115	87
125	70
135	67
145	67
155	67
165	74
175	95
180	97

3.4. Să se aproximeze şi să se reprezinte grafic prin interpolare liniară şi apoi prin interpolare spline cubică vectorii de date **m** şi **n**, ale căror valori sunt conţinute în fişierul exterior de date cu numele „**fia1.prn**”

3.5. Să se extrapoleze şi să se reprezinte grafic următoarele 25 de valori în funcţie de precedentele 20 de valori ale vectorului: $v_k := e^{-\frac{k}{100}} \cdot \sin\left(\frac{k}{10}\right)$, $k := 1..50.$

4. Modul de lucru

4.1. Se vor realiza cerințele impuse ținându-se cont de noțiunile teoretice prezentate în §2.1.

4.2. Pentru a se realiza cerințele se va ține cont de noțiunile teoretice prezentate în §2.1. cât şi de noțiunile despre operatorii specifici matricelor din bara de instrumente *Matrix* (Lucrarea 4/§2.).

4.3. Se vor realiza cerințele ținându-se cont de noțiunile teoretice prezentate în §2.1. cât şi de noțiunile despre crearea vectorilor şi matricelor (Lucrarea 4/§2.1.).

4.4. Se va proceda ca la punctul anterior.

4.5. Pentru a se realiza cerințele impuse se va ține cont de noțiunile teoretice prezentate în §2.2.

5. Conținutul referatului

Referatul trebuie să conțină:

- Titlul şi scopul lucrării
- Noțiuni teoretice
- Chestiuni de studiat
- Rezultatele obținute şi observații personale.